

Estudi posicional del Sol & la Lluna

Jan Groeneveld Sousa

Abstract

Aquest informe pretén explicar els processos mitjançant els quals s'ha calculat el dia de l'any en el qual es veia la sortida del Sol en una direcció i en un punt concret, amb l'objectiu de datar una fotografia. S'han estudiat dos mètodes diferents per trobar la declinació de l'astre en funció del dia de l'any. En la segona part es mostren els mètodes seguits per tal de trobar la trajectòria que traçava la Lluna en el cel en una nit concreta, des del mateix lloc, i també s'explica com s'ha determinat la fase del cicle lunar en el qual es trobava aquesta.

1 Introducció

L'objectiu d'aquest estudi ha estat el de trobar en quina data s'observa la sortida del Sol per sobre del Puig de l'Ofre, una de les muntanyes de Mallorca, des d'un lloc concret en el municipi de Sóller, al nord-oest de l'illa. Aquest estudi s'ha fet, al 2022, amb l'objectiu de recrear una fotografia datada de l'any 1979; pel que s'han tingut en compte aquests dos anys a l'hora de fer els càlculs. També s'ha volgut esbrinar com hauria vist la Lluna un observador en el mateix municipi, en la nit entre els dies 11 i 12 de novembre de l'any 1979, tot això en el context d'analitzar la possibilitat de que una fotografia històrica del possible albirament d'un OVNI mostri en realitat un reflex generat pel Sol naixent o la lluna.

Abans de començar, però, i per tal de fer més entenedor aquest text, s'ha volgut fer una petita introducció a la física i a les matemàtiques que apareixeran en aquest informe. Per tal de descriure les posicions aparents dels astres en el cel - amb l'objectiu, per exemple, de realitzar una observació - els astrònoms recorren al que s'anomena **astronomia esfèrica**. Aquesta és una branca científica que es preocupa de les posicions i el moviment dels astres no en l'univers tridimensional on ens trobem sinó en la **bovada celeste** que veiem des de la Terra. En aquest marc no resulta rellevant, per exemple, la distància entre la Terra i els astres, pel que la posició de qualsevol cos en el cel es descriu com un punt sobre una esfera: la bovada o volta celeste. Igual que en la Terra donem dos angles (**latitud** i **longitud**) que determinen completament la posició sobre la superfície d'aquesta (Figura (1)), només ens caldran dues coordenades angulars per tal de conèixer una posició en el cel.

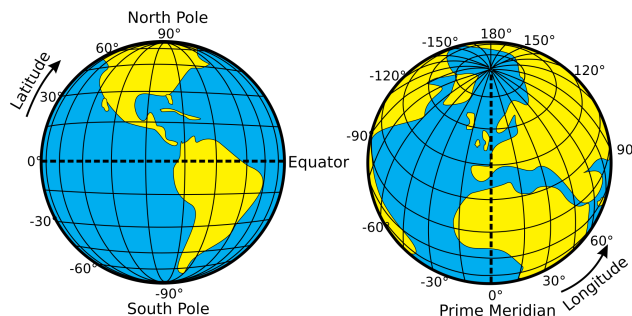


Figura 1: Coordenades angulars en la superfície d'una esfera, concretament la Terra.

És per això que en aquesta introducció voldria començar mostrant quins són els **sistemes de coordenades** amb que es descriuen aquestes posicions. ‘Sistemes’ en plural perquè no hi ha una manera única de fer-ho, i justament això és el que fa útil l’astronomia esfèrica.

La idea bàsica darrere d’aquestes coordenades es fonamenta en senyalar dos pols a la boveda celeste (un **pol nord** i un **pol sud**) i definir una coordenada “vertical” que va de pol a pol, valent 0° a l’**equador** i una coordenada “longitudinal”, que valdrà 0° en algun punt concret i variarà en la direcció perpendicular a l’altra coordenada. En el cas de la Terra aquestes són la latitud, que és nul·la a l’Equador i $\pm 90^\circ$ als pols, i la longitud que prenem com 0 al meridià de Greenwich. Una idea molt similar traspasarem als mapes de les estrelles: definirem dos **pol**s de l’esfera celeste i un “**meridià**” - amb ells podem donar les posicions de qualsevol punt que ens interressi.

1.1 Sistema de coordenades horitzontal

Aquest és el més intuïtiu d’aquests sistemes de coordenades, ja que és el que descriuria de forma natural un observador sobre un punt de la superfície terrestre. Els pols nord i sud seran el **zenit** (el punt just sobre de l’observador) i el **nadir** (el punt just a sota, que queda amagat per la Terra).

Així anomenarem **altura** (h) a l’angle vertical, que valdrà 90° en el zenit, 0° en l’horitzó i serà negatiu pels punts que s’amaguen a sota d’aquest, fins a -90° , al nadir.

De manera similar anomenarem **azimut** (a) a un angle que gira en la direcció longitudinal. Per conveni serà $a = 0^\circ$ quan mirem en la direcció sud, i girarà en sentit horari. A mesura que la Terra giri sobre el seu eix, l’azimut de les estrelles que veiem va creixent.

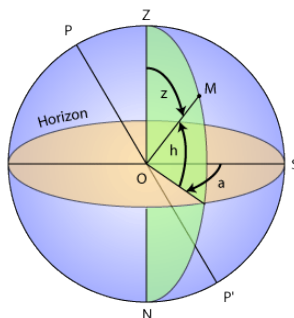


Figura 2: Coordenades horitzontals. Font: Observatori de París / U.F.E

Amb aquestes dues coordenades podem donar la posició de qualsevol objecte tal i com es veu en el cel. Això sí, **no són fixes** per cap objecte astronòmic (ja que veiem com les estrelles es mouen en el cel a mesura que passa el temps, tant al llarg d’una nit amb la rotació de la Terra sobre si mateixa, com al llarg de l’any amb l’òrbita d’aquesta entorn del Sol) **ni són universals** sobre tota la Terra (depenen del lloc des d’on estem mirant. Per exemple, a l’hemisferi Sud i al Nord veiem estrelles diferents). Això ens portarà a buscar altres sistemes de coordenades que siguin més universals o independents del temps.

1.2 Sistema de coordenades equatorial

Aquest és un sistema de coordenades que resol aquestes situacions de dependència de les posicions de les estrelles amb la posició de l’observador i el temps. És per això que es fan servir les coordenades equatorials en els mapes i catàlegs del cel i de les constel·lacions. En aquest segon sistema de coordenades s’agafa com a pols de l’esfera els pols de la Terra, de forma que l’equador de la boveda celeste queda també allà on està l’equador de la Terra, encara que estès cap al cel.

La coordenada vertical aquí l'anomenarem **declinació** (δ). La definim, de forma similar a l'altura, nul·la en l'equador celeste, $+90^\circ$ en el pol nord i -90° en el pol sud.

L'**ascensió recta** (α), que és com anomenarem la segona coordenada, l'agafem com nul·la en el “**punt vernal**”, per on passa el Sol en l'equinocci de març¹, i la farem créixer anti-horàriament des d'allà.

Per estrelles llunyanes les posicions en aquest sistema de coordenades són fixes. Podem dir, per exemple, que l'estrella Polar té les coordenades ($\delta \sim 89^\circ$, $\alpha \sim 2^h$)^[1], el que ens diu que es troba a prop del pol nord.

El Sol, però, té una ascensió recta i una declinació variables al llarg de l'any, ja que la Terra rota al voltant d'aquest, i perquè els plans equatorial i el de l'òrbita no estan orientats exactament en la mateixa direcció. Trobem una declinació variable entre $+23,44^\circ$ i $-23,44^\circ$, màxima i mínima als solsticis i nul·la als equinoccis^[2]. Aquest angle és el que hi ha en cada moment entre els plans de rotació de la Terra i del Sistema Solar (Figura 3).

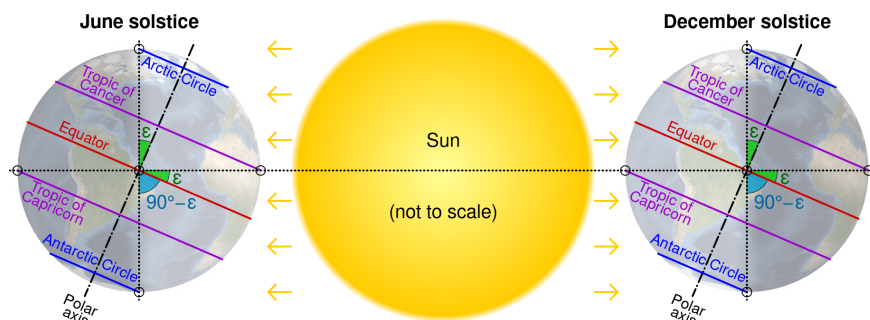


Figura 3: Al llarg de l'any, la declinació del Sol varia.

1.3 Sistema de coordenades horari

Aquest és un sistema de coordenades entremig dels altres dos, que serà important quan fem el **canvi de coordenades** d'horitzontal a equatorial i viceversa. És **local**, el que vol dir que el valor de les coordenades dependrà de la posició de l'observador, però farem servir com a pols de la boveda celeste els mateixos pols de la Terra, com feia el sistema equatorial.

La coordenada vertical és la mateixa que la del sistema equatorial, la **declinació** (δ).

La segona coordenada és nova: l'**angle horari** (H), que es mesura perpendicular a la declinació, nul·la si l'objecte que mirem es troba al meridià sud, i creixent en sentit horari. En aquest sentit és bàsicament el mateix que l'ascensió recta, només que és perpendicular a la declinació i no necessàriament a l'altura.

Una curiositat d'aquest sistema de coordenades és que la declinació d'una estrella llunyana no dependrà del temps (la dels planetes, el Sol i la Lluna sí) mentre que l'angle horari creixerà amb el temps.

1.4 Canvis de coordenades

Aquí es donarà, de forma resumida, el procediment que fa servir qualsevol astrònom per fer una predicció d'on veurà en el cel una estrella en funció de la seva posició geogràfica (**latitud i longitud**) i del **temps** (tant la data com l'hora del dia) en que es fa l'observació.

En el cas d'estrelles llunyanes (és a dir, tot astre excepte el nostre Sol, els planetes del Sistema Solar, la Lluna,

¹També se l'anomena “punt Àries” ja que fa 2000 anys, quan es va descriure primer, es trobava en aquesta constel·lació. Avui en dia es troba en la constel·lació de Píscis.

etc.) es podrà trobar la posició d'aquest en un catàleg astronòmic, expressada en coordenades equatorials (**declinació i ascensió recta**).

El pas següent és calcular l'**angle horari** a partir de l'**ascensió recta** i del **temps** de l'observació. Per fer això hi ha una equació bastant senzilla^[2] que relaciona aquestes tres variables:

$$H = \Theta - \alpha \quad (1)$$

En la següent secció (1.5) es mostra una explicació de què és Θ i com es pot relacionar amb el temps que veuríem nosaltres en un rellotge o un calendari.

Finalment, la transformació de coordenades horàries a horitzontals és una rotació de l'esfera que té en compte la **latitud** del punt d'observació. Així coneixem exactament en quina direcció hem d'enfocar el telescopi per poder veure una estrella, en funció de la seva posició en una carta del cel.

Per astres amb coordenades equatorials que no són fixes, com són el Sol i la Lluna que ens interessin pel nostre estudi són necessaris una sèrie d'algorismes per determinar quina serà la seva posició en la carta del cel en funció de la data.

1.5 Mesura del temps

Abans d'entrar en la qüestió dels càlculs, hem d'acabar de donar una idea bàsica d'una part molt important en l'astronomia observacional, que serà necessària per aquest estudi. Es tracta de la mesura del pas del temps.

Les mesures del temps les basem tant en la rotació de la Terra, en l'òrbita d'aquesta al voltant del Sol, o en rellotges atòmics^[2]. En aquest informe veurem:

El **temps civil**, que anomenarem t , que es basa en la trajectòria aparent del Sol al voltant de la Terra. Ignorarem els fusos horaris i treballarem en el **temps universal** (UT), la hora solar en el meridià de Greenwich. Per passar al temps oficial de Sóller haurem de sumar una hora quan estiguem en l'horari d'hivern i dues en el d'estiu (des de 1981^[3]).

El **temps sideri**, que anomenarem Θ , es basa en la trajectòria aparent de les estrelles al voltant de la Terra (concretament es defineix en funció de la posició del punt Àries^[2]). Aquest temps serà rellevant només quan fem la transformació de coordenades equatorials a horàries. Un detall interessant és que, com la Terra al llarg d'un dia traça una petita fracció de la seva òrbita, el temps sideri (que es mesura segons les estrelles) i el temps civil/solar (que es mesura segons el Sol) no avancen al mateix ritme^[2], encara que la diferència serà pràcticament insignificant tenint en compte la precisió que busquem en aquest estudi.

Podem relacionar **temps sideri local** (en el lloc de fer l'observació) i **temps universal** amb la següent expressió^[2]:

$$\Theta = \Theta_0 + \lambda + 1,00273790935t \quad (2)$$

On t és el temps universal que es mesura en aquell dia des de les 0^h al Meridià de Greenwich, λ és la longitud geogràfica (positiva cap a l'est) i Θ_0 és la posició del punt vernal (allà on $\delta, \alpha = 0^\circ, 0^\circ$) a les 0^h a Greenwich. Aquest valor es troba en catàlegs, en funció de cada data possible, o es pot calcular (en la secció (2.2.2) d'aquest informe es mostra com). El valor aquest de 1,00273790935 apareix per corregir la diferència de ritme en que el temps civil i el temps sideri corren.

Quan treballem amb dates, en comptes d'hores, en els nostres càlculs les expressarem com a "**dies julians**" (JD), el que simplement serà el nombre de dies que han passat comptant amb el calendari julià (anys de 365 dies amb correccions pels anys bissextils) des del principi de l'any 4713 abans de Crist². Per conveni els valors enters de JD equivalen a les 12^h UT d'aquell dia, de forma que les 0^h UT seran valors semienters, amb part decimal igual a $1/2$ ^[4]. Això permet que la data sigui un número amb el qual serà fàcil de treballar.

²Encara que el calendari julià no existís encara llavors, de fet no existia ni l'Imperi Romà.

2 Càlculs

2.1 Estudi posicional del Sol

En aquesta secció de l'informe es presentaran els mètodes seguits en l'estudi del Sol. El primer que s'ha volgut estudiar ha estat, assumint que l'objecte vist en la fotografia és el Sol sortint darrere la muntanya, de forma que genera un reflex (*lens flare*) en la càmera del fotògraf, si es pot donar una estimació de la data en que la fotografia es va prendre (l'any 1979) i si es pot donar una data possible per recrear-la (en l'any 2022).

La fotografia que ens interessa estudiar va ser presa en un punt concret del municipi de Sóller, amb les coordenades (latitud i longitud) següents:

$$\phi = 39,767236^\circ \quad \lambda = 2,714413^\circ$$

I mostra el Sol just sobre el Puig de l'Ofre, la muntanya central que es veu en el paisatge. Fent servir les coordenades del Puig i un calculador en línia^[5], s'ha obtingut la distància i l'azimut del Puig des de la posició de l'observador:

$$D = 4515 \text{ m} \quad a = 270,015^\circ$$

Un valor com aquest de l'azimut ens indica que la muntanya es troba a l'est de Sóller, el que encaixa amb el que veiem en els mapes i amb que la fotografia sigui d'una sortida, i no d'una posta, de Sol. La informació que tenim aquí no és més que la direcció en la que s'ha de mirar des de Sóller per veure el Puig.

Amb la distància, l'elevació del punt d'observació i la del cim del Puig de l'Ofre, podem calcular l'altura aparent (h') d'aquest, vista pel fotògraf. El càlcul no és més que simple trigonometria:

$$\begin{aligned} \tan(h') &= \frac{\text{Diferència d'elevació}}{D} \\ \Rightarrow h' &= \arctan \left[\frac{\text{Diferència d'elevació}}{D} \right] = 0,2297705 \text{ rad} \end{aligned}$$

Aquesta altura requereix d'una correcció per la refracció de la llum en l'atmosfera, si és que volem obtenir la posició real del Sol. Igual que la llum canvia la seva trajectòria quan passa de l'aire a l'aigua, veiem un canvi (encara que molt més petit) en el pas de l'espai exterior a l'atmosfera terrestre. El càlcul més precís possible per aquesta pertorbació és tremendament complicat, i requereix conèixer bé les condicions meteorològiques del moment. Una bona aproximació, però, és la següent^[2]:

$$\sin(90^\circ - h) = n_0 \sin(90^\circ - h')$$

On, tenint en compte el valor de l'índex de refracció de l'aire^[6] ($n_0 = 1,000293$), tenim:

$$h = 0,2285144 \text{ rad}$$

Veiem com el canvi d'altura és pràcticament imperceptible, de l'ordre de minuts de grau. En aquest estudi aquesta diferència no és realment rellevant, però en tot cas, es farà servir el valor de h i no el de h' en els càlculs a continuació.

Per tal de determinar en quin dia de l'any tenim el Sol en aquesta posició (h, a), passarem l'estudi a coordenades equatorials, (δ, α) . Podem calcular la declinació del Sol amb l'expressió (3), que ve de fer el canvi de coordenades entre un sistema i l'altre. L'expressió surt de les transformacions que es fan per rotar vectors, i depèn de la latitud (ϕ) del lloc^[2]:

$$\delta = \arcsin [\sin(h) \sin(\phi) - \cos(h) \cos(\phi) \cos(a)] = 0,1460098 \text{ rad} \quad (3)$$

Ara bé, per tal de trobar el dia a partir de la declinació, no hi ha una metodologia tan clara. S'han fet servir múltiples mètodes, explicats a continuació.

2.1.1 Model d'òrbita circular

El primer mètode és el que suposa el model més simple de tots, i és el de l'òrbita de la Terra al voltant del Sol perfectament circular. Si aquest fos el cas, la declinació del Sol variaria de forma sinusoidal amb el temps:

$$\delta = \varepsilon \sin[\omega t + \varphi_0]$$

Tenint en compte el valor màxim de la declinació, $\varepsilon = 0,409041996 \text{ rad}^{[2]}$, i el període de rotació de l'òrbita de la Terra (la durada de l'any), tenim:

$$\delta = \varepsilon \sin \left[2\pi \left(\frac{n}{365,2425} \right) \right] \quad (4)$$

Aquí n és el nombre de dies (pot ser no-enter sense problema) que hi ha des de l'últim equinocci de març³, ja que aquest és el punt on la declinació del Sol és nul·la però seguidament es torna positiva. Invertint aquesta funció (com el model és bastant simple això es pot fer analíticament, a mà), obtenim dos valors, equivalents a les dues dates de l'any on el Sol surt en aquell punt:

$$n = \frac{365,2425}{2\pi} \arcsin \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right) \quad (5)$$

2.1.2 Model d'òrbita el·líptica

Un segon model lleugerament més complex considera que la distància Terra-Sol no és sempre la mateixa, el que ve a dir que l'òrbita no és un cercle perfecte sinó una el·lipse. Introduïm en l'expressió (4) una correcció^[7]:

$$\delta = \varepsilon \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{n}{365,2425} \right) + \frac{2e}{1+e^2} \sin \left[2\pi \left(\frac{(n-n_p)}{365,2425} \right) \right] \right\} \quad (6)$$

On $e = 1,67\%$ és l'excentricitat de l'òrbita el·líptica^[7], i n_p la diferència entre el dia on la Terra passa pel periheli (el moment on la distància Terra-Sol és mínima) i l'equinocci de primavera. Aquesta correcció surt de les lleis de Kepler, que relacionen cada moment de l'òrbita el·líptica de la Terra amb la velocitat que aquesta porta en cada moment.

No hi ha una expressió analítica que doni $n(\delta)$ a partir de l'equació (6), pel que aquí s'ha calculat $\delta(n)$ per una sèrie de valors de n (de 0 a 365, donant 2000 punts equiespaiats) en un full de càlcul de **Microsoft Excel**, i s'ha buscat en quin moment coincidia la declinació amb la que busquem. Per fer això s'han tingut en compte les dates del periheli en ambdós anys^[8]. Un cop trobat un valor aproximat de n , s'ha repetit el càlcul al voltant d'aquell dia, aquest cop amb més precisió, per tal d'obtenir resultats bons.

Amb aquest model obtenim dos valors diferents, que junt amb les dates calculades (tenint en compte els equinoccis de primavera en ambdós anys) es presenten en la secció de **Resultats** (3) d'aquest informe.

³Equinocci de primavera a l'Hemisferi Nord, de tardor al Sud.

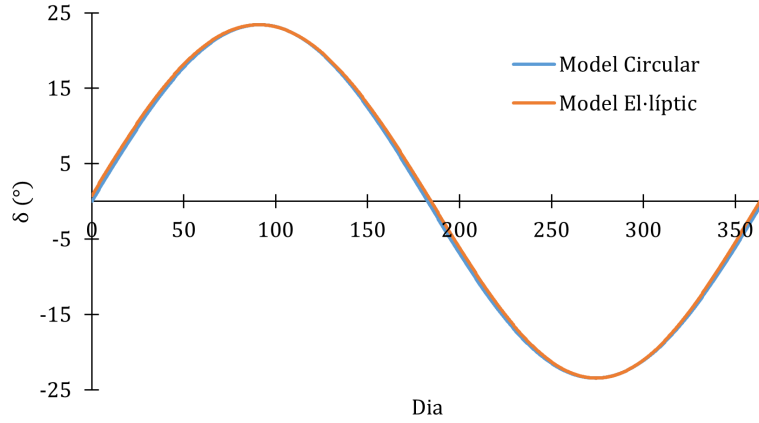


Figura 4: Declinació del Sol al llarg de l'any calculada amb i sense la correcció per l'excentricitat de l'òrbita. Veiem una petita variació entre les dues corbes, encara que la tendència general sigui pràcticament la mateixa. Els resultats “bons” es prendran com els del model el·líptic, encara que la diferència en la data és només d'un o dos dies.

2.1.3 Mètode alternatiu

Finalment, també s'ha volgut contrastar els resultats obtinguts a partir del model el·líptic amb un tercer mètode, basat en un article científic⁴ ([9] en la secció de **Referències**). Basant-se en el nom d'un dels seus autors, Taiping Zhang, s'ha anomenat “mètode TZ” a aquest mètode en la secció de resultats, més endavant.

En el fons les seves fórmules surten del mateix lloc que les dels altres mètodes, però segueix un procediment completament diferent.

Per calcular la declinació (δ) del Sol el que fa aquest mètode és treballar amb un sistema de coordenades anomenades “**eclíptiques**” (β, λ), on l'equador de la boveda es troba en el pla de l'òrbita Terra-Sol^[2]. Les equacions relacionen la **longitud eclíptica** λ amb una variable n que fixa el dia respecte del 01/01/2000, similar a les n que teníem per comptar els dies en els models anteriors. Amb això:

$$\delta = \arcsin[\sin \varepsilon \sin \lambda] \quad (7)$$

On ε és la inclinació entre l'angle de rotació de la Terra i de la òrbita Terra-Sol:

$$\varepsilon = 23,440 - 0,0000004n \text{ (}^\circ\text{)}$$

On λ evoluciona amb el pas del temps com:

$$\lambda = L + 1,915 \sin g + 0,020 \sin (2g) \text{ (}^\circ\text{)}$$

Sent:

$$L = 280,466 + 0,9856474n \text{ (}^\circ\text{)}; \quad g = 357,528 + 0,9856003n \text{ (}^\circ\text{)}$$

Aquestes expressions surten, en el fons, de mesures experimentals que ajusten amb més precisió que els mètodes anteriors el moviment de la Terra al voltant del Sol - vist des de la Terra en moviment i rotació.

El nombre n el podem calcular fàcilment a partir de l'any Y_{in} (en el nostre cas fem el càlcul per 1979 i per 2022), N_{leap} el nombre d'anys bissextils entre el 2000 i l'any d'interès, negatiu si l'any és superior, i k sent el dia de l'any, des de 1 fins a 365:

$$n = -1,5 + (Y_{in} - 2000) 365 + N_{leap} + k \quad (8)$$

⁴Taiping Zhang, Paul W. Stackhouse Jr. *A solar azimuth formula that renders circumstantial treatment unnecessary without compromising mathematical rigor* (2021)

Amb ús dels fulls de càlcul de **Microsoft Excel** s'han calculat les declinacions, en cada any, per una sèrie de dies, com en el mètode anterior. Finalment s'ha comparat amb la declinació objectiu, i s'han obtingut dues dates per ambdós anys.

2.2 Estudi posicional de la Lluna

En aquesta secció de l'informe es presentaran els càlculs i mètodes matemàtics seguits per realitzar la segona part de l'estudi, de determinar si, assumint que la fotografia ha sigut presa en la nit de l'11/11/1979, l'objecte que es veu sobre el Puig de l'Ofre és la Lluna. La determinació de la trajectòria de la Lluna és bastant complicada, ja que entren en joc la rotació de la Terra i la del propi satèl·lit al voltant d'aquesta, resultant en un moviment aparent que no és gens trivial. S'han seguit per això els passos descrits per l'astrònom belga Jean Meeus en el seu llibre *Astronomical Algorithms* (en la secció de **Referències**, la font [4]).

2.2.1 Trajectòria aparent de la Lluna

S'ha fet servir una calculadora en línia^[10], encara que basada en un dels mateixos algorismes de J. Meeus, per tal de determinar les coordenades en el sistema equatorial de la Lluna en aquella nit. S'ha obtingut així la declinació (δ) i l'ascensió recta (α) de l'astre per diferents hores, des de les 18:30 fins a les 8:30 en intervals de 30 minuts (en temps universal, per passar a l'hora civil de Sóller cal sumar una hora). Aquestes coordenades eren pràcticament constants al llarg de la nit, variant només dos graus com a molt - encara que aquesta diferència s'ha tingut en compte per tal de tenir màxima precisió.

Fent ús de les expressions (1) i (2), que apareixen en la secció d'**Introducció** d'aquest informe, s'ha relacionat aquestes coordenades equatorials amb l'angle horari (H) de la Lluna al llarg de la nit. Per tal de fer això hem de determinar el valor del temps sideri a les 0^h al meridià de Greenwich, Θ_0 . Aquest càlcul es mostrarà en la següent secció (2.2.2).

Amb aquestes dades, i amb la latitud (ϕ) del punt d'observació, s'ha pogut trobar, finalment, la posició de la Lluna en coordenades horitzontals (h, a) en funció del temps universal^[2].

$$\sin h = \sin \delta \sin \phi + \cos H \cos \delta \cos \phi \quad (9)$$

$$\sin a = \frac{\cos \delta \sin H}{\cos h} \quad (10)$$

En la secció de **Resultats** es presenten els valors obtinguts.

2.2.2 Càlcul del temps sideri Θ_0

El càlcul de Θ_0 s'ha fet seguint una fórmula del llibre de J. Meeus ([4]).

Si definim una variable x que ens dona la data en segles (recordem que JD és el dia julià que determina la data):

$$x = \frac{JD - 2451545}{36525}$$

De forma que $x = 0$ significarà l'1 de gener de l'any 2000, els valors negatius seran anteriors a aquesta data, i els positius superiors.

Podem calcular el temps sideri a les 0^h UT com^[4]:

$$\Theta_0 = 100,46061837 + 36000,770053608x + 0,000387933x^2 - \frac{x^3}{38710000} \quad (\text{en graus})$$

2.2.3 Fase lunar

Queda per determinar l'aspecte que tenia la Lluna aquella nit. Per saber en quina fase es trobava s'ha fet servir l'algoritme de Chapront, descrit en el llibre de J. Meeus ([4]). Aquest, basant-se en la periodicitat del cicle lunar (de $\sim 29,53$ dies) i en la data coneguda d'una Lluna nova (al 06/01/2000), permet afirmar-nos que la data de qualsevol fase lunar, expressada com a dia julià, serà:

$$JD_k = 2451550,09765 + 29,53058853k$$

On k és un nombre qualsevol que serà:

- Enter per dates de Lluna nova.
- Semienter (la part decimal és .50) per dates de Lluna plena.
- Quarts d'enter (la part decimal és .25 ó .75) per quarts minvant i creixent.

L'algorisme que descriu Chapront té termes d'ordre k^2 , k^3 i inclús k^4 , perquè la durada del cicle lunar va variant al llarg del temps, però per una data tan propera al 2000 com és l'any 1979, aquestes correccions seran de l'ordre dels segons, el que va molt més enllà de la precisió que busquem en aquest estudi.

Nosaltres buscarem valors de k propers a la data d'interès, que seran negatius ja que és anterior a l'any 2000. Una forma aproximada de trobar aquest nombre és^[4]:

$$k \cong (any - 2000) \times 12,3685$$

Prenent $any = 1979,85$ (la part decimal reflecteix que ens trobem a finals d'any):

$$\implies k \cong -249,23$$

Buscarem valors de k propers que equivalguin a fases lunars diverses, i compararem les dates que obtenim amb la nit d'interès. Per passar de dia julià a la data s'ha fet servir una calculadora en línia de la NASA ([11]).

3 Resultats

3.1 Estudi del Sol

Els dos mètodes, el model d'òrbita el·líptica i el "mètode TZ", ens mostren que són dues dates en cada any les que impliquen que el Sol va tenir aquella posició: una en primavera i després una en tardor. Seguint els càlculs descrits en la secció anterior trobem els resultats:

Any	Mètode de l'Òrbita				Mètode TZ			
	n_1	Data 1	n_2	Data 2	k_1	Data 1	k_2	Data 2
1979	19,284	09/04	163,024	31/08	100,946	11/04	243,586	01/09
2022		08/04		30/08	101,362	12/04	243,979	01/09

Taula 1: Resultats per cada un dels dos mètodes. Les dates s'han calculat tenint en compte els equinoccis de primavera en cada un dels anys^[8], i què vol dir en cada cas la n i la k .

3.2 Estudi de la Lluna

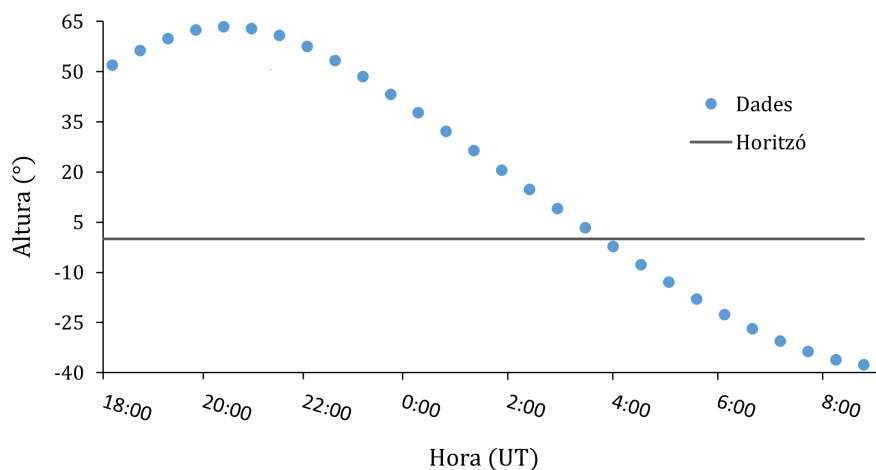


Figura 5: Gràfica que mostra la variació de l'altura de la Lluna en funció del temps universal (per tenir el temps civil de Sóller cal sumar una hora). Notar que al voltant de les 21 h la Lluna té una altura màxima de $\sim 65^\circ$ i que entre les 3 i les 4 (concretament a les 3:48 h UT - a les 4:48 h a Sóller) la Lluna es posa redra de l'horitzó (passa a tenir altura negativa).

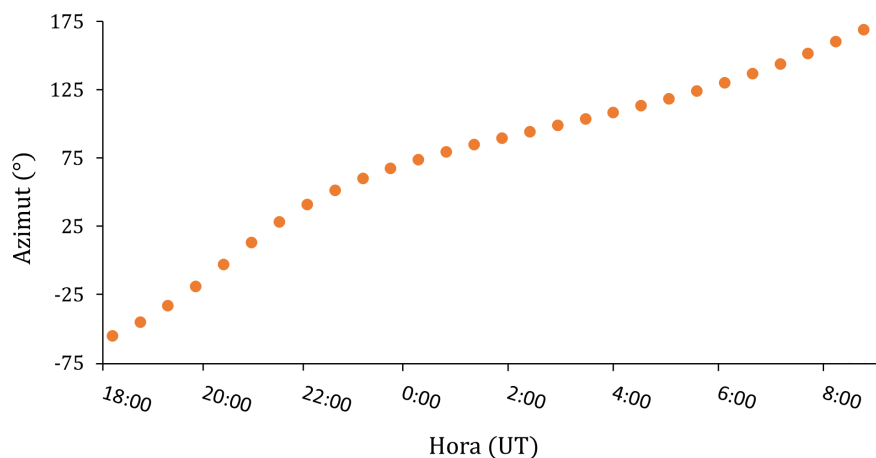


Figura 6: Gràfica que mostra la variació de l'azimut de la Lluna en funció del temps universal. Recordem que azimut 0° implica que la Lluna la veiem al sud, i azimut 180° al nord. En el moment de posta trobem $\alpha = 106^\circ$, que, tenint en compte el que ja hem dit que vol dir l'azimut, implica que es posa entre l'oest (90°) i el nord-oest (135°).

Amb el procediment descrit en la part de **Càlculs** hem trobat les següents dates pels punts crítics de les fases lunars:

k	JD_k	Data	Fase lunar
-250,00	2444167,45	20/10/1979	Lluna nova
-249,75	2444174,83	28/10/1979	Quart creixent
-249,50	2444182,22	04/11/1979	Lluna plena
-249,25	2444189,60	12/11/1979	Quart minvant
-249,00	2444196,98	19/11/1979	Lluna nova
-248,75	2444204,36	26/11/1979	Quart creixent

Taula 2: Taula de valors amb dades d'interès de l'octubre i del novembre de 1979.

Veiem que justament en la nit que interessa estudiar la fase era quart minvant - la meitat de la Lluna es trobava il·luminada, l'altra meitat fosca.

4 Conclusions

Estudiant la posició del Sol amb els dos mètodes trobem dates similars però lleugerament diferents, amb un parell de dies de separació. Aquesta diferència es deu a que els dos mètodes tenen en compte moviments diferents que fa la Terra. El més exacte és el de TZ, que considera fenòmens com la variació de la obliqüitat de l'eclíptica (l'angle entre el pla de l'òrbita Terra-Sol i l'equador celeste) al llarg dels anys.

Com la fotografia es va presentar al novembre de 1979, es podria prendre la data més propera, l'01/09/1979, com a resultat de l'estudi. Al mateix dia 43 anys després, a l'01/09/2022, és quan es podria repetir la fotografia i trobar el Sol en el mateix punt.

Seguint els algorismes de Jean Meeus, que en aquest informe s'han explicat pas a pas, hem pogut fer un seguiment de la Lluna en aquella data concreta del 1979. Veient en quin azimut tenim la Lluna en el moment de posta, descartem que l'objecte observat sigui la Lluna posant-se.

5 Glossari

Altura: L'altura, denominada h , és la coordenada vertical del *sistema horitzontal*, aquell que descriu el que veu naturalment un observador sobre la Terra. És un angle que val 90° just sobre de l'observador (en el *zenit*), i 0° en l'horitzó.

Angle horari: Denominat H , és un angle en la direcció longitudinal que definim per les *coordenades horàries*. Es pren com 0° en la direcció sud, i creix horàriament, el que vol dir que pel que fa a la posició de les estrelles, aquest angle creix a mesura que passa el temps (ja que la Terra rota sobre si mateixa).

Ascensió recta: Denominada α , és l'angle en la direcció longitudinal de les *coordenades equatorials*. Es pren com nul al *punt vernal*, que és on passa el Sol en l'equinocci de març. Per les estrelles llunyanes és fixat, pel que el podem consultar en catàlegs i mapes del cel.

Astronomia esfèrica: És la branca de la ciència preocupada de descriure les posicions *aparents* dels astres en el cel, amb l'objectiu de fer observacions. Les bases de l'astronomia esfèrica s'expliquen en aquest informe.

Azimut: Denominat a , és l'angle perpendicular a l'*altura* en les *coordenades horitzontals*. El prenem com 0° en la direcció sud, i creix horàriament.

Canvi de coordenades: Conjunt d'operacions matemàtiques que fem per trobar quina és la posició d'un objecte en un *sistema de coordenades* si la tenim expressada en un altre. Per passar de coordenades *equatorials* a *horàries* hem de tenir en compte el *temps*, i per passar d'*horàries* a *horitzontals* hem de conèixer la posició de l'observador.

Coordenades eclíptiques: *Sistema de coordenades* que pren com a *equador* de l'esfera el pla d'òrbita entre la Terra i el Sol. No ha aparegut molt en aquest informe, però és útil per determinar la posició de cossos del Sistema Solar (el Sol, altres planetes, etc.).

Coordenades equatorials: *Sistema de coordenades* que pren com a referència els *pols* i l'*equador* de la Terra però projectats cap al cel. Expressant la posició d'estrelles llunyanes en aquestes coordenades (*declinació* i *ascensió recta*) veiem que són fixes, el que ens permet fer cartes del cel.

Coordenades horàries: *Sistema de coordenades* que fa servir la *declinació* en la direcció vertical i l'*angle horari* en la longitudinal - és útil sobretot com a pas intermedi per fer *canvis de coordenades* entre l'*equatorial* i l'*horitzontal*.

Coordenades horitzontals: *Sistema de coordenades* natural d'un observador fix sobre la Terra, que senyala el cel i descriu amb dos angles l'*altura* i la direcció cardinal (*azimut*) d'un punt en la boveda celeste.

Declinació: Denominada δ , és la coordenada vertical que fan servir els *sistemes equatorial* i *horari*. Per estrelles llunyanes és fixa.

Dia julià: Manera típica que tenim d'expressar les dates en els càlculs astronòmics, comptant els dies des d'un moment des de la prehistòria (l'1 de gener del 4713 abans de Crist a les 12^h UT).

Equador: Quan en una esfera descrivim dos *pols* oposats, l'*equador* és la línia que trobem al mig, són tots els punts de l'esfera que es troben a la mateixa distància dels dos pols. En la majoria de sistemes de coordenades tenim una variable angular que val 0° en tots els punts de l'*equador*.

Equinocci: Moments de l'any en el qual el Sol se situa en l'*equador* celeste, en altres paraules, quan la *declinació* d'aquest és nul·la. Indica el començament de les estacions de tardor i de primavera.

Greenwich: *Meridià* de referència en la Terra, que serveix per determinar la *longitud geogràfica* (que és 0° allà i creix cap a l'est) i el *temps universal* - que definim en funció de la posició aparent del Sol (l'*angle horari*) sobre els punts del meridià.

Índex de refracció: Quocient entre la velocitat de la llum en el buit i en un medi material (on va més lenta degut als xocs amb la matèria). En aquest informe ha aparegut mencionat l'índex de refracció de l'aire, en el moment de fer una correcció deguda a la refracció atmosfèrica de la llum solar.

Latitud: És, en el *sistema de coordenades* habitual per descriure posicions geogràfiques en la Terra, la coordenada vertical. Val $\pm 90^\circ$ en els *pols* Nord i Sud, respectivament, i és nul·la a l'*equador*. La denominem ϕ en aquest informe.

Longitud: És la coordenada horitzontal pel sistema geogràfic habitual. Val 0° al *meridià de Greenwich* i augmenta fins a 360° cap a l'est. La denominem λ .

Meridians: En una esfera, són cercles perpendiculars a l'*equador* i que passen pels dos *pols*. Quan definim un sistema de coordenades és útil tenir un meridià de referència per la variable angular longitudinal, com pot ser el *meridià de Greenwich*, la direcció sud, o el *punt vernal*.

Nadir: Nom que rep el punt de la boveda celeste a sota de l'observador, en el *sistema de coordenades horitzontal*, on fa de *pol sud* de l'esfera, amb *altura* igual a -90° . El seu pol oposat és el *zenit*.

Periheli: En l'òrbita Terra-Sol, el periheli és el punt on la distància entre aquests astres és mínima. El seu oposat és l'*afeli*. En aquest informe s'ha hagut de tenir en compte la data de l'any en la qual la Terra passava pel periheli per ajustar l'equació (6), del model el·líptic de l'òrbita.

Pols de l'esfera: En qualsevol esfera podem definir dos punts privilegiats, oposats entre sí, pels quals una de les dues coordenades angulars no estarà ben definida i l'altra serà o bé màxima o mínima. Aquests són els pols de l'esfera. En l'*astronomia esfèrica* es fa servir els punts que surten naturalment de la rotació de la Terra, de l'òrbita d'aquesta, o els punts *zenit* i *nadir* per descriure els diferents *sistemes de coordenades*.

Punt vernal: També anomenat *punt Àries*, és el punt de la boveda celeste on la *declinació* i l'*ascensió recta* són nul·les. Serveix com a punt de referència per definir aquesta segona coordenada. El nom de punt “vernal” fa referència a que per allà és per on passa el Sol en l'equinocci de març (pas a la primavera en l'HN i a la tardor en l'HS).

Sistema de coordenades: Parella d'angles que fem servir per determinar la posició d'un punt en una esfera - concretament en la boveda celeste o en la superfície de la Terra. Aquesta parella d'angles no és única, ja que els *pols* i el *meridià de referència* amb que les definim no sempre és el mateix.

Solstici: Moments de l'any en el qual el Sol se situa en *declinació* màxima o mínima. Indica el començament de les estacions d'estiu i d'hivern.

Temps civil: Temps “legal” en cada punt de la Terra. Definit en funció del *temps universal* i afegint o restant hores en funció dels fusos horaris (que depenen de la posició geogràfica) i de si tenim canvis d'horari. El temps civil a Sóller, que ha estat el lloc d'estudi, és el centreeuropeu (CET o *Central European Time*), igual al temps universal $+1^h$ en la meitat de l'any i $+2^h$ en l'altra meitat (horari d'estiu). Al descriure's en funció del *temps universal*, que depèn de la posició del Sol, corre lleugerament més lent que el *temps sideri*.

Temps sideri: Denominat Θ , és la mesura del temps basada en la rotació aparent de les estrelles llunyanes al voltant de la Terra, no del Sol (el que la fa lleugerament més ràpida que el *temps universal*, t). És la mesura del temps que es fa servir per fer càlculs en astronomia, com ara el *canvi de coordenades d'horàries a equatorials*. Es defineix, en cada lloc, com l'*angle horari* del *punt vernal*.

Temps universal: Denominat t , és la mesura del temps basada en la rotació aparent del Sol al voltant de la Terra. És el que es fa servir com a base dels *temps civils* arreu del món.

Zenit: Nom que rep el punt de la boveda celeste a sobre de l'observador, en el *sistema de coordenades horitzontal*, on fa de *pol nord* de l'esfera, amb *altura* igual a $+90^\circ$. El seu pol oposat és el *nadir*.

Referències

- [1] Centre de Données astronomiques de Strasbourg. URL: <http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/sim-id?protocol=html&Ident=polaris&NbIdent=1&Radius=2&Radius.unit=arcmin&submit=submit+id>. (accedit al: 24.06.2022).
- [2] H. Karttunen. *Fundamental Astronomy*. Springer Verlag, 2007 (Fifth Edition). Chap. 2.
- [3] ¿Cuándo empezó el cambio de hora en España? URL: <https://www.elperiodico.com/es/sociedad/20191024/cambio-hora-espana-2019-7698465>. (accedit al: 30.06.2022).
- [4] J. Meeus. *Astronomical Algorithms*. Willmann-Bell, 1991 (First Edition).
- [5] Federal Communications Commission. *Distance and Azimuths Between Two Sets of Coordinates*. URL: <https://www.fcc.gov/media/radio/distance-and-azimuths>. (accedit al: 22.05.2022).
- [6] Raymond A. Serway & Jerry S. Faughn. *College Physics*. Brooks/Cole-Thomson Learning, 2003.
- [7] Finley R. Shapiro. “The position of the sun based on a simplified model”. In: *Renewable Energy*, Vol. 184 (2021).
- [8] NASA Goddard Institute for Space Studies. *ModelE AR5 Simulations: Past Climate Change and Future Climate Predictions: Time and Date of Vernal Equinox*. URL: <https://data.giss.nasa.gov/modelE/ar5plots/srvernal.html>. (accedit al: 24.05.2022).
- [9] Taiping Zhang & Paul W. Stackhouse Jr. “A solar azimuth formula that renders circumstantial treatment unnecessary without compromising mathematical rigor”. In: *Renewable Energy*, Vol. 172 (2021).
- [10] MOON CALCULATOR. URL: <http://www.internetsv.info/MoonCalc.html>. (accedit al: 29.06.2022).
- [11] Jet propulsion laboratory - California Institute of Technology. *JD Date/Time Converter*. URL: <https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/jdc/>. (accedit al: 29.06.2022).